TD Dénombrement

Dénombrement

VV1 **Exercice 1** On répartit p boules distinctes dans n urnes distinctes. Quel est le nombre de répartitions pour lesquelles au moins une urne contient au moins deux boules ?

W8H **Exercice 2** On considère $E_n = \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\{0,1\}$. Dans E_n, combien y a-t-il

1. de matrices ?
2. de matrices dont chaque ligne contient un unique coefficient 1.
3. de matrices dont chaque ligne et chaque colonne contient exactement un coefficient 1 ?

L42 **Exercice 3** On considère un jeu de 52 cartes. Déterminer le nombre de mains possibles de 5 cartes

1. au total
2. contenant exactement un As
3. contenant au moins un As
4. contenant exactement 2 carreaux et 3 piques
5. contenant 5 valeurs distinctes (c'est-à-dire aucune paire)
6. contenant 5 valeurs consécutives

F4P **Exercice 4** Soit E un ensemble fini, de cardinal n. Dénombrer

1. Les relations binaires sur E.
2. Les relations binaires symétriques et réflexives sur E.

SFE **Exercice 5** Combien y a-t-il de n-uplets appartenant à $\{0,1\}^n$

1. en tout ?
2. contenant au moins un 0 et un 1.
3. avec exactement k chiffres 0.
4. ★ ne contenant pas le motif 001.

4BV **Exercice 6**

1. Déterminer le nombre de bijections $f\colon [\![1, n+1]\!] \to [\![1, n+1]\!]$ telles que $f(1) \neq 1$.
2. Déterminer le nombre de surjections $f\colon [\![1, n+1]\!] \to [\![1, n]\!]$.

Exercice 7 ★ Un k-coloriage d'un graphe G est un coloriage de ses sommets avec k couleurs, de sorte que des sommets adjacents aient des couleurs différentes. Montrer que l'application qui à k associe le nombre de k-coloriages de G est polynomiale.

Parties

CGS **Exercice 8** [Banque CCP MP 2022] Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E telles que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E telles que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre de triplets (A, B, C) de parties de E deux à deux disjointes vérifiant $A \cup B \cup C = E$.

B2R **Exercice 9** On note $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs, et $c_n = |\mathcal{C}_n|$.

1. Déterminer c_0 (pour $\emptyset$), c_1 et c_2.
2. Montrer que $\forall n \geq 2,\ c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$.
3. Justifier l'existence de $\lambda \in]1{,}2[$ et $C > 0$ tel que $c_n \sim C\lambda^n$.

CF8 **Exercice 10** ★ Formule du crible, ou principe d'inclusion-exclusion Soit $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ des parties finies de E. Montrer que

$$\Big|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \Big|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\Big|.$$

Combinatoire

XNG **Exercice 11** Interprétation combinatoire de la suite de Fibonacci Soit F_n la suite de Fibonacci, définie par $F_0 = F_1 = 1$ et pour $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

1. Montrer que F_n est le nombre de façons de paver un rectange $1 \times n$ par des carrés 1×1 et des dominos 1×2. (Par convention, il y a une unique façon de paver le rectangle vide.)
2. Donner des démonstrations combinatoires des identités suivantes.
   a) $\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.
   b) $\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1}$.
   c) $\forall p, q \geq 1,\ F_pF_q + F_{p-1}F_{q-1} = F_{p+q}$.
   d) $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1}$.

IU6 **Exercice 12** ♣ Identité de Vandermonde Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et $0 \leq n \leq p + q$. Montrer que $\displaystyle\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$.

M7B **Exercice 13** ★ Soit $n > 0$ et $m \geq 0$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}(-1)^k = (-1)^m\binom{n-1}{m}$.

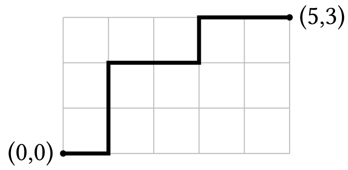
HHQ **Exercice 14**

1. Soit U_9 l'ensemble des racines 9-ième de l'unité. Quel est le nombre de façon de colorier U_9 de sorte qu'un seul élément soit de couleur rouge, trois de couleur verte et cinq de couleur bleue ?
2. ★ Quel est le nombre de colliers différents de neuf perles dont l'une est rouge, trois sont vertes et cinq sont bleues ?
3. ★ Quel est le nombre de colliers différents de neuf perles dont l'une est rouge, quatre sont vertes et quatre sont bleues ?

Classiques

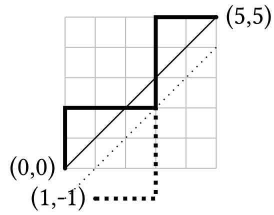
50B **Exercice 15** 1. Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Dénombrer le nombre de chemins du point $(0,0)$ au point (n,m) restant dans $\mathbb{Z}^2$, par pas d'une unité vers la droite ou vers le haut.

2. En déduire que $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.



EZK **Exercice 16** Principe de réflexion On s'intéresse à des chemins avec des pas unitaires vers la droite où le haut, allant de $(0,0)$ à (n,n).

1. Montrer qu'il y a autant de tels chemins allant de $(0,0)$ à (n,n) qui traversent la diagonale que de tels chemins allant de $(-1,1)$ à (n,n).
2. Combien y a-t-il de chemins reliant $(0,0)$ à (n,n) restant au-dessus de la diagonale principale ?



J54 **Exercice 17** Partitions ordonnées d'un entier

1. Soit $E_{n,p}$ l'ensemble des $(x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$ tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$. Déterminer $|E_{n,p}|$.
2. Soit $F_{n,p}$ l'ensemble des $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^*$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = p$. Montrer que $|F_{n,p}| = \binom{p-1}{n-1}$.
3. Soit $G_{n,p}$ l'ensemble des $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = p$. Montrer que $|G_{n,p}| = \binom{n+p-1}{n-1}$.

XLY **Exercice 18** Dérangements On appelle dérangement de $[\![1,n]\!]$ toute permutation σ de $[\![1,n]\!]$ n'admettant aucun point fixe. On note D_n le nombre de dérangements de $[\![1,n]\!]$ et on convient que $D_0 = 1$.

1. Montrer, pour $n \geq 0$, que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = n!$.
2. ★ Montrer que $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$. En déduire que pour tout $n \geq 2$, $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

   On en déduit l'expression $D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

4DD **Exercice 19** Soit $s(n,k)$ le nombre d'applications surjectives de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots k\}$. Pour $1 \leq i \leq k$, on note E_i l'ensemble des applications de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, k\}$ dont l'image ne contient pas i.

1. Soit $1 \leq \ell \leq k$ et $1 \leq i_1 < \ldots < i_\ell \leq k$ des entiers. Calculer le cardinal de $E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_\ell}$.
2. En utilisant la formule du crible, montrer que $\quad s(n,k) = \sum\limits_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$.

Divers

QV1 **Exercice 20** Formule du multinôme Montrer que $(x+y+z)^n = \sum\limits_{a+b+c=n} \frac{n!}{a!b!c!} x^a y^b z^c$.

FW1 **Exercice 21** Soit $\mathbb{K}$ un corps fini à q éléments.

1. Quel est le nombre de droites vectorielles dans $\mathbb{K}^n$?
2. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Montrer que le nombre de familles libres $(e_1, \dots, e_k)$ dans $\mathbb{K}^n$ est $(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\dots(q^n-q^{k-1})$.
3. En déduire le cardinal de $GL_n(\mathbb{K})$.

7Z6 **Exercice 22** ★ Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble de cardinal $n \geq 3$ et $A_1, .., A_m$ des sous-ensembles non vides de X inclus strictement dans X. On suppose que chaque paire d'éléments de X est incluse dans un de ces sous-ensembles uniquement. Soit $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ où $b_{ij} = 1$ si x_i est dans A_j et 0 sinon. Montrer que la matrice BB^T est inversible puis que $m \geq n$.

Ind : *On admettra que* $\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} B^T$, *et que* $\operatorname{rang}(AB) \leq \max(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B)$.

LGF **Exercice 23** ★ Antichaînes [Oral X] Soit E un ensemble fini de cardinal n. Une antichaîne de longueur q est un ensemble $\{A_1, \dots, A_q\}$ de parties de E tel que $\forall i \neq j,\ A_i \not\subset A_j$ et $A_j \not\subset A_i$.

1. Donner des exemples d'antichaînes.
2. Dénombrer le nombre de bijections de E sur $\{1, \dots, n\}$ envoyant une partie A fixée de E de cardinal m sur $\{1, \dots, m\}$.
3. Montrer que si $\{A_1, \dots, A_q\}$ est une antichaîne de E avec $|A_1| = m_1, \dots, |A_q| = m_q$, alors $\sum\limits_{i=1}^{q} \frac{1}{\binom{n}{m_i}} \leq 1$.
4. Déterminer la longueur maximale d'une antichaîne de E.

Dénombrabilité

TSU **Exercice 24** Expliciter une injection $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.

L0B **Exercice 25** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties finies d'un ensemble E.

1. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est finie ou dénombrable. On pourra commencer par traiter le cas où les (A_i) sont disjoints.
2. En déduire que $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable.
3. En déduire qu'il existe des nombres réels transcendants, c'est-à-dire des réels qui ne sont racines d'aucun polynôme à coefficients entiers.

MTG **Exercice 26** ★ On considère des tripodes dans le plan. Un tripode est constitué des 3 segments joignant les sommets d'un triangle équilatéral à son centre. On suppose que les tripodes ne s'intersectent pas. Montrer qu'il y a au plus un nombre dénombrable de tripodes.